VII

1

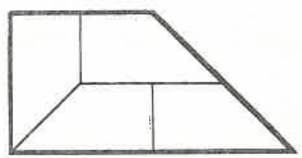
Viz obr. 232 na str. 304.

2

Pravoúhlý lichoběžník můžeme rozdělit na čtyři shodné lichoběžníky podle obr. 233.

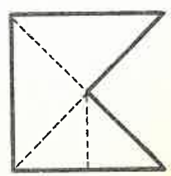
3

Obsah celého pozemku je $(400\ \mathrm{m})^2 = 160\,000\ \mathrm{m}^2$. Vikví osili $(100\ \mathrm{m})^2 = 10\,000\ \mathrm{m}^2 =$ $= 1$ ha. Ovsem osili $160\,000 - 10\,000 = 150\,000$ $(\mathrm{m}^2) = 15$ ha.

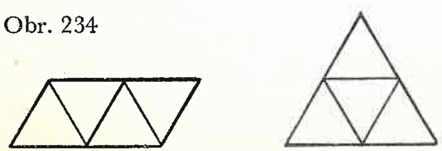


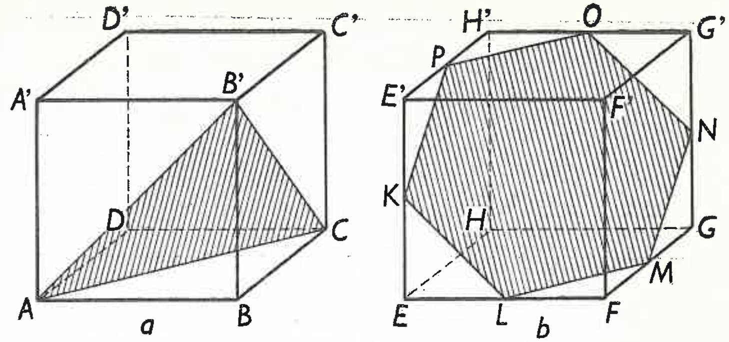
Obr. 233

Obr. 235



Obr. 234





Obr. 236

4

Nové stolky jsou třínohé, nemohou se kývat, protože rovina je určena třemi body, které neleží v přímce.

5

Síť čtyřstěnu se dá zobrazit dvěma způsoby (obr. 234).

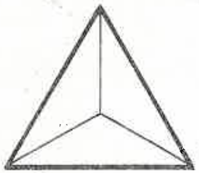
6

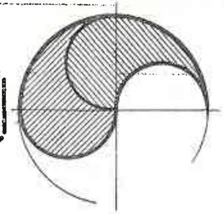
Dva čtverce dostaneme tak, že vlajku rozdělíme na 4 pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky a z těch složíme čtverec (obr. 235).

7

a) Krychli je nemožné protnout jednou rovinou tak, aby vznikl pravidelný pětiúhelník. Krychle má dvě a dvě stěny navzájem rovnoběžné. Jestliže některá rovina protíná dvě rovnoběžné roviny, jsou průsečnice rovnoběžné. Protože pětiúhelník nemá rovnoběžné strany, není možno jednou rovinou protnout krychli tak, aby vznikl pravidelný pětiúhelník.

b) Protneme-li krychli rovinou, která prochází jen třemi jejími vrcholy, je řezem rovnostranný trojúhelník (obr. 236 a), protože jeho strany jsou úhlo-





Obr. 237 Obr. 238 Obr. 239

příčky stěn krychle jako úhlopříčky shodných čtverců.

c) Jestliže rovinu řezu proložíme středy hran krychle (viz obr. 236 b), je řezem pravidelný šestiúhelník.

8

Rovnostranný trojúhelník rozdělíme na tři shodné trojúhelníky podle obr. 237.

9

Viz obr. 238.

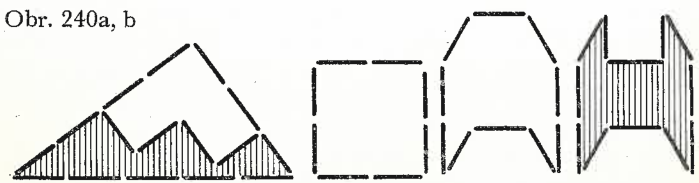
10

Křivku rozdělíme na dvě shodné části podle obr. 239.

11

a) Nejdříve sestavíme z 12 zápalek pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou složeny ze 3 a 4 zápalek

Obr. 240a, b



a přepona z 5 zápalek (viz obr. 240a). Obsah tohoto trojúhelníka bude $\frac{3 \cdot 4}{12} = 6$ čtverečných jednotek.

Jestliže potom odstraníme 4 zápalky, jež tvoří pravý úhel, a položíme je stupňovitě, jako je to na obr. 240a, zmenší se obsah trojúhelníka o 3 čtverečné jednotky. Výsledný obrázek bude mít 3 čtverečné jednotky.

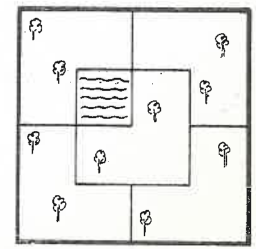
b) Sestrojíme čtverec s obsahem 4 čtverečných jednotek. Proměníme ho přidáním zápalek na obrázek stejného obsahu jako na obr. 240b. Oddělíme-li od něho jeden čtverec, dostaneme obrazec s obsahem 3 čtverečných jednotek.

12

Viz obr. 241.

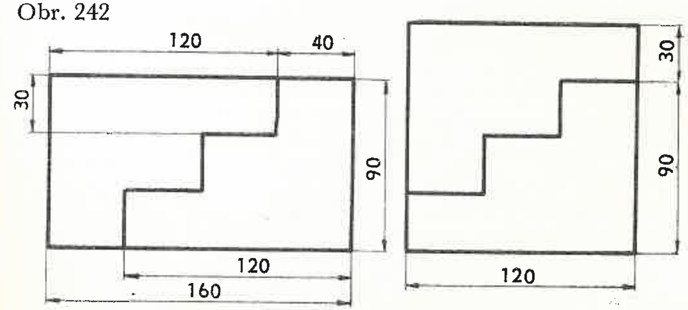
13

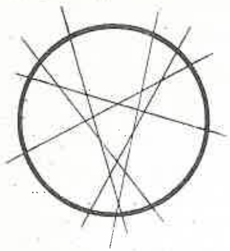
Viz obr. 242. Obdélník s rozměry 90 cm × 160 cm rozřežeme tak, jak je to



Obr. 241

Obr. 242





Obr. 243 Obr. 244 Obr. 245

na prvním obrázku a jeho části složíme tak, jak je to na druhém obrázku.

14

Kruh je možno rozdělit šesti přímkami na 22 dílů podle obr. 243.

15

Viz obr. 244.

16

Půlměsíc rozdělíme dvěma přímými řezy na 6 částí podle obr. 245.

17

Na délku 1 m potřebujeme 20 zápalek. K vytvoření 1 pásu potřebujeme přidat 21 + 20 zápalek, dohromady to bude 61 zápalek. K připojení dalšího pásu musíme přidat 41 zápalek. Takových pásů potřebujeme přidat ještě 18, tudíž 18 . 41 zápalek = 738 zápalek. K pokrytí 1 m² potřebujeme tudíž 840 zápalek.

18

Obsahy obrazců jsou v poměru 1 : 3 : 5 : 7 ... atd.,

protože je můžeme rozdělit na trojúhelníky a obrazce se pravidelně zvětšují vždy o 2 trojúhelníky *123*.

19

Přemístíme zápalky označené 1, 2, 3, 4 do polohy 1′, 2′, 3′, 4′ (obr. 246).

20

Viz obr. 247.

21

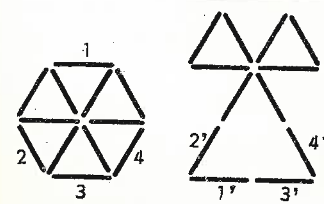
Obsah prvního pozemku je 125 m . 80 m = 10 000 m². Strana druhého pozemku musí být 100 m.

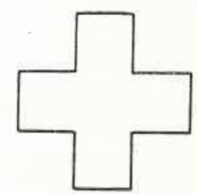
22

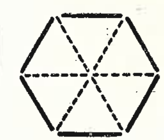
Nejlehčeji to provedete tak, že stěny krychle rozložíte do roviny a na takto vzniklém nákresu spojíte body označující polohu pavouka a mouchy úsečkou, která je nejkratší cestou.

23

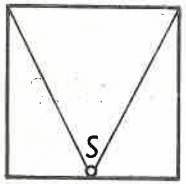
Sestrojíme 6 rovnostranných trojúhelníků se společným vrcholem. Všechny vnitřní zápalky odstraníme a vytvořený obrázek je pravidelný šestiúhelník. (Viz obr. 248.)

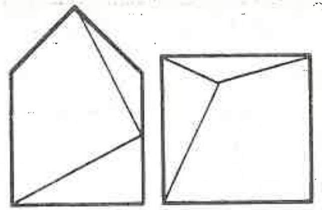






Obr. 246 Obr. 247 Obr. 248





Obr. 249

Obr. 250

24

Viz obr. 249.

25

Hledáme číslo, jehož druhá mocnina se rovná jeho čtyřnásobku. Takovým číslem je číslo 4. Strana květinového záhonu je tudíž 4 m.

26

Čtverečný metr má tisíckrát tisíc čtverečných milimetrů. Každých tisíc vedle sebe položených milimetrových čtverečků má délku 1 m; tisíc tisíců bude mít délku 1 000 m, tj. 1 km. Pásek bude dlouhý 1 km.

27

Strana čtvercového pozemku je 10 m. Strana květinového záhonu je 5 m. Obsah květinového záhonu je 25 m².

28

Úhlopříčka $AC = BS = r$, proto průměr $d = 7{,}2$ cm.

29

Pozemek tvaru čtverce bude potřebovat nejkratší plot. Např. $16^2 = 256$ (m²) bude mít plot $4 \cdot 16 = 64$ (m) a $8 \cdot 32 = 256$ (m²) by měl plot $2 \cdot 8 + 2 \cdot 32 = 16 + 64 = 80$ (m).

30

Přímky AF a FC svírají úhel 60°, protože úsečky AF a FC jsou stranami rovnostranného trojúhelníka AFC. Jeho strany AC, AF, FC jsou stejné, neboť jsou úhlopříčkami shodných čtverců.

31

Jestliže se umýváním zmenší všechny rozměry hranolu mýdla na polovinu, bude jeho objem osmkrát menší, takže zbývající osmina mýdla stačí přibližně na 1 den.

32

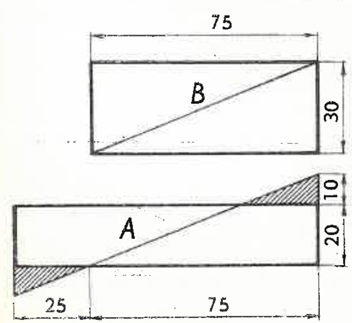
Viz obr. 250.

33

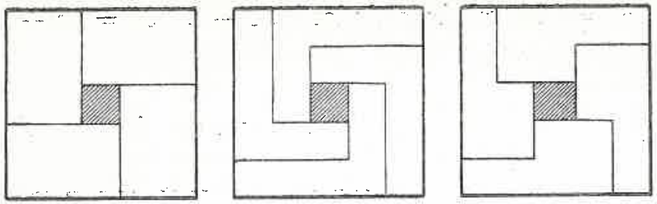
Zahrádka má délku 6 m a šířku 3 m.

34

Desku B rozřežeme po úhlopříčce a části posuneme proti sobě podle A a slepíme. Potom odřežeme vyšrafované trojúhelníky. (Obr. 251.)



Obr. 251



Obr. 252

35

Evina přítelkyně měla pravdu. Jestliže zvětšíme jednoho činitele o $\frac{1}{3}$, zvětší se součin $\frac{4}{3}$krát. Zmenšíme-li druhého činitele o $\frac{1}{3}$ (nezávisle na tom, zda je stejný jako první činitel), zmenší se tento součin $\frac{2}{3}$krát. Výsledný součin tudíž bude $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ správného součinu. Chyba je $\frac{1}{9}$. Jestliže tato chyba je 20 m^3, je správný výsledek 180 m^3.

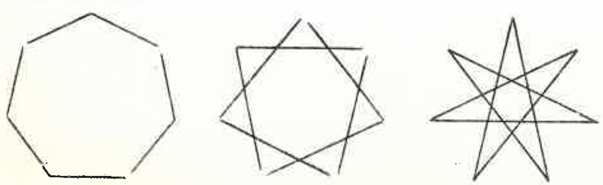
36

Úlohu můžeme řešit např. podle obr. 252.
Některá řešení jsou dost složitá. Nejlepší je rozdělit plochu na 5 × 5 polí, což značně ulehčí řešení.

37

Krychlový metr obsahuje 1 000 . 1 000 . 1 000 mm^3.

Obr. 253



1 000 milimetrových krychliček postavených na sebe vytvoří sloupec 1 m vysoký. Tisíc metrů je 1 km a protože jich máme ještě tisíckrát víc, vytvoří dohromady sloupec vysoký 1 000 km.

38

Pravidelný sedmiúhelník můžeme zobrazit podle obr. 253.

39

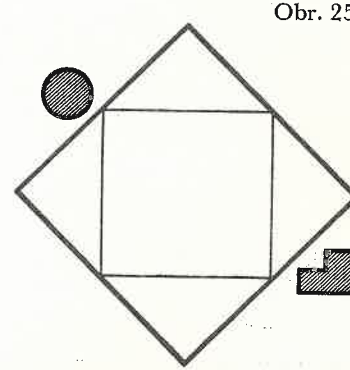
Obvody jsou v témže poměru jako průměry. Jestliže je obvod jedné dýně 60 cm a druhé 50 cm, jejich průměry jsou v poměru $60 : 50 = \frac{6}{5}$ a poměr jejich objemů je $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} = 1,73.$

Velká dýně by měla být 1,73krát dražší než menší, tj. dražší o 73 %.
Žádají za ni však jen o 50 % víc, proto je výhodnější koupit větší dýni.

40

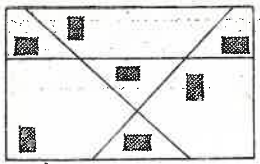
Zvětšení rybníka se dá uskutečnit podle obr. 254.

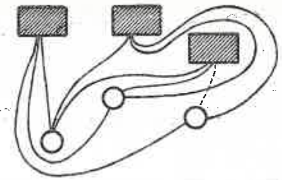
Obr. 254



41

a) Trojúhelníky jsou podobné, neboť všechny jejich úhly jsou shodné (strany jsou rovnoběžné).
b) Obdélníky nejsou podobné, přestože mají všechny úhly shodné. Jejich strany nejsou úměrné.





Obr. 255 Obr. 256

42

Viz obr. 255.

43

Devět cest není možno sestrojit. Možno však vést 8 cest (viz obr. 256).

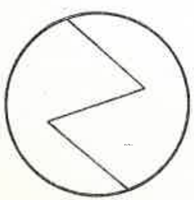
44

Lupou bude vidět stejně velký úhel jako prostým okem.

45

Předpokládejme, že výška věže na obrázku je 95 mm a délka její základny je 19 mm. Odměříme nyní délku základny věže ve skutečnosti. Měří-li např. 14 m, její výšku vypočteme podle podobnosti:
$19 : 95 = 14\,000 : x$
nebo úsudkem: Je-li výška pětkrát větší než šířka a šířka je 14 m, výška bude 5 . 14 m = 70 m.

Obr. 257



46

Kruh se složí ze dvou kusů podle obr. 257.

47

Kdybyste si vzali velkou čokoládovou kouli, ošidili byste se asi o 1 cm^3 čokolády.

48

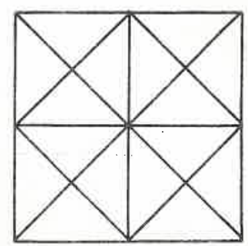
Model bude 8 000 000krát lehčí, proto musí mít i 8 000 000krát menší objem. Jestliže objemy podobných těles jsou v takovém poměru jako třetí mocniny jejich rozměrů, musí být model 200krát nižší než skutečná věž, neboť $200^3 = 8\,000\,000$.
Výška skutečné věže je 300 m, výška modelu musí být tudíž $300 : 200 = 1{,}5$ (m).

49

Jde o pythagorejský trojúhelník se stranami v poměru 3 : 4 : 5. Přepona je 10 cm, jedna odvěsna 6 cm, druhá následkem toho 8 cm, obsah obdélníka je 48 cm^2.

50

Čtverec z jednotlivých částí složíme takto (obr. 258):



Obr. 258

VIII

1

Průměr menší (např. haléřové) mince je 16 mm, její obvod je, jak se dá lehce vypočítat, o něco více než 50 mm. Délka otvoru po jeho narovnání je polovinou jeho obvodu, tudíž 25 mm. Průměr koruny je jen 23 mm; proto může projít otvorem i tehdy, bude-li se počítat i s její šířkou 1,5 mm (viz obr. 259).

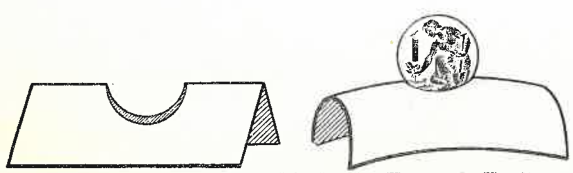
2

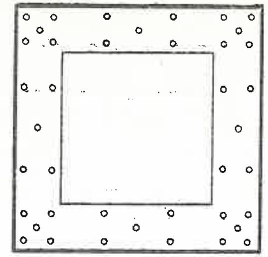
Viz obr. 260.

3

Objem většího melounu je $\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{125}{64}$krát, tj. skoro

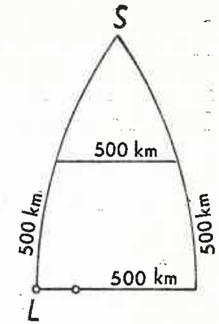
Obr. 259





Obr. 260

Obr. 261



dvakrát větší než objem malého melounu. Je tudíž výhodnější koupit větší meloun. Stojí o polovinu víc než menší a dužiny je v něm skoro dvakrát víc než v menším.

5

Oba hrnce jsou geometricky podobná tělesa. Má-li větší hrnec osmkrát větší objem, jsou všechny jeho délkové rozměry dvojnásobné; je dvakrát vyšší a dvakrát širší v obou směrech. Jeho povrch je tedy 2 . 2 = 4krát větší, neboť povrchy podobných těles se mají k sobě jako druhá mocnina délek. Při stejné síle stěn je váha hrnce úměrná velikosti jeho povrchu, tudíž větší hrnec je čtyřikrát těžší než malý hrnec.

6

Stačí vypustit z předních pneumatik trochu vzduchu, tím se jeřáb značně sníží.

7

Vzducholoď přistála na východ od Leningradu, protože naše Země je kulatá a poledníky se k severu sbíhají. Při svém letu na východ přeletěla větší počet stupňů než při zpáteční cestě (viz obr. 261).

8

V úloze je „chytačka". Jenda koupil 80 fialek za 8 Kčs, za elektriku dal 1,20 Kčs, takže mu celkem přirozeně 80 haléřů zůstalo.

9

Na každé z 25 stanic může cestující žádat jízdenku do kterékoli z ostatních stanic. Je třeba proto vytisknout $25 \times 24 = 600$ různých druhů jízdenek. (Třeba poznamenat, že těch 600 druhů představuje jen obyčejné jízdenky 2. třídy. Kdybychom vzali v úvahu ještě 1. třídu, dělnické a žákovské lístky, zpáteční lístky atd., bylo by jich ještě více.)

10

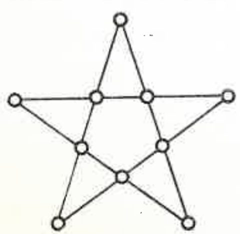
Obr. 262.

11

Výhodnější je rozseknout všechny 3 články toho jistého kousku a spojit jimi ostatní kousky.

12

Osobní vlak couvne na odbočku. Nechá tam vozy, které se tam vejdou, a odjede kupředu. Rychlík předjede před zanechané vozy, zapojí je a odtáhne znovu na trať. Potom couvne a vozy odpojí. Přední vozy osob-



Obr. 262

ního vlaku spolu s lokomotivou zajedou na odbočku a rychlík má již volnou trať.

13

Kdyby lyžař, který jel rychlostí 15 km za hodinu, jel o dvě hodiny déle, ujel by o 30 km více než má ve skutečnosti ujet. Uvážíme-li, že za 1 hodinu ujede o 5 km více než první lyžař, byl tudíž na cestě $30 : 5 = 6$ hodin. Při rychlosti 15 km za hodinu trvá cesta tudíž $6 - 2 = 4$ hodiny. Tím je určena vzdálenost, kterou ujel: $15 \,.\, 4 = 60$ km. Aby mu cesta trvala 5 hodin, musí jet rychlostí $60 : 5 = 12$ km/h.

14

Všech trojúhelníků je 44, vezmeme-li v úvahu všechny kombinace všech trojúhelníků, i těch, které složíme z původních. $16 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 44$.

15

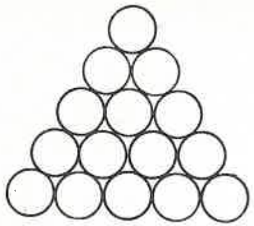
Dámy je možno postavit např. na políčka d6, e5, f4, g8, h7. Najděte ještě jiné řešení.

16

Označme topinky písmeny *A*, *B*, *C*. Maminka dala nejprve opéci topinky *A* a *B*. Za půl minuty dala opéci druhou stranu topinky *A* a topinku *C*. Ve třetí půlminutě opékala druhé strany topinek *B* a *C*.

17

Stačí vybrat tři ponožky, neboť dvě z nich budou určitě stejné barvy. S rukavicemi to není tak jednoduché, neboť se liší navzájem nejen barvou, ale i tím, že jsou pravé a levé. V tomto případě je třeba vybrat 21 rukavic. Kdybychom vybrali menší počet, např. 20, mohlo by se stát, že všech 20 rukavic bude na tutéž ruku (10 hnědých a 10 černých).



Obr. 263

18

Patnáct mincí podle podmínky uspořádáme tak, abychom vytvořili trojúhelník, jehož každou stranu bude tvořit 5 mincí (obr. 263).

19

$$\begin{array}{r} 4\,1\,5 \\ \times\quad 3\,8\,2 \\ \hline 8\,3\,0 \\ 3\,3\,2\,0 \\ 1\,2\,4\,5 \\ \hline 1\,5\,8\,5\,3\,0 \end{array}$$

20

Obr. 264.

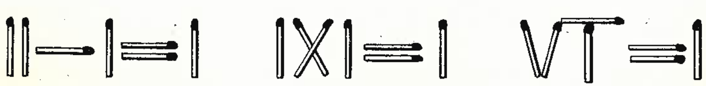
21

$22 + 2 = 24, \quad 3^3 - 3 = 24.$

22

Chyba je již v druhé rovnosti, kde v závorkách je jed-

Obr. 264



Obr. 265

notka. Vytýkání před závorku můžeme provádět jen při součtu a rozdílu, ale nikdy při násobení a dělení. Celá další manipulace s rovností vyplývá již z této chyby.

23

V prvním stupni nesl každý akrobat váhu téměř 57 kg, v druhém stupni 48,75 kg a v třetím stupni 32,5 kg.

24

Je to těchto 9 čísel: 12, 14, 16, 82, 84, 86, 92, 94, 96.

25

Obr. 265.

26

Odpověď: 10 hodnot.
Označme sérii znamének písmeny: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Vzpomenutých deset hodnot vznikne těmito kombinacemi: *a*, *b*, *c*; *a*, *b*, *d*; *a*, *b*, *e*; *a*, *c*, *d*; *a*, *c*, *e*; *a*, *d*, *e*; *b*, *c*, *d*; *b*, *c*, *e*; *b*, *d*, *e*; *c*, *d*, *e*.

27

$578 : 17 = 34.$

28

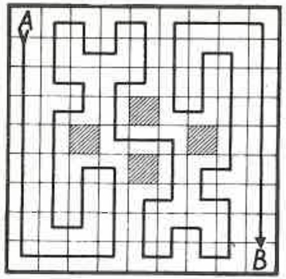
$\sqrt{(11 - 1)^{11+1}}$

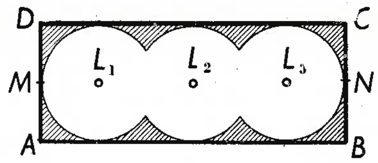
29

$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1\,000.$

30

Celý vtip Lermontovy matematické zábavy spočívá v tom, že při početních výkonech nepozorovaně dává





Obr. 266 Obr. 267

odečítat myšlené číslo, takže počítá vlastně jen se známými hodnotami.

31

Počet let, jež má dnes, označme písmenem x. Za 3 roky mu bude $(x + 3)$ let a před třemi roky mu bylo $(x - 3)$ let.

$$3\,(x + 3) - 3\,(x - 3) = x$$
$$3x + 9 - 3x + 9 = x$$
$$x = 18$$

Dnes je mu osmnáct let.

32

Obr. 266.

33

Stačí vyjmout jeden plod z krabice označené *JH*. Kdyby to bylo jablko, obsahuje krabice dvě jablka, jinak by měla správné označení. V krabici *HH* nemohou být dvě hrušky, neboť nápis je chybný, a jestliže v *JH* jsou jablka, bude v *HH* jedno jablko a jedna hruška. V krabici *JJ* jsou dvě hrušky. Kdybychom vytáhli z *JH* hrušku, bude v *JJ* hruška s jablkem a v krabici *HH* dvě jablka.

34

Pavouk má 8 nohou, brouk 6 nohou. Kdyby měl jen samé brouky, bylo by tam 8 . 6 = 48 nohou, což je o 6 méně, než je uvedeno v úloze. Pavouk má o 2 nohy více než brouk, takže rozdíl 6 nohou vznikl tím, že jsme vynechali 3 pavouky (6 : 2 = 3).
V krabičce tudíž bylo 5 brouků a 3 pavouci.

35

Starší dělník potřebuje o 10 minut více času než mladý, aby se dostal z domu do práce. Kdyby starší vyšel o 10 minut dříve než mladší, přijdou do továrny současně. Jakmile vyjde starší dříve o 5 minut, dohoní ho mladší právě v polovině cesty za 10 minut (neboť mladší přejde celou cestu za 20 minut).

36

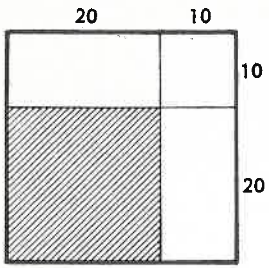
Koule č. 1 je ze zinku, číslo 2 ze železa, číslo 3 z olova, číslo 4 z hliníku a číslo 5 z cínu.

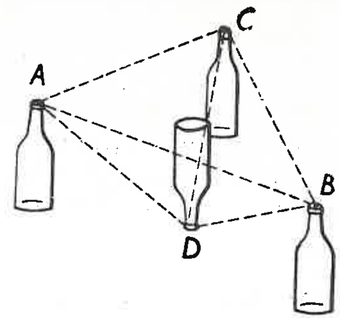
37

Na konci bylo na každé hromádce 16 zápalek. Při posledním překládání jsme na první hromádku přeložili tolik zápalek, kolik na ní právě bylo. Na třetí hromádce, ze které jsme při posledním překládání vzali 8 zápalek a předtím přidali tolik, kolik jich tam právě bylo, muselo být 12 zápalek. Na druhé hromádce, z níž jsme přeložili na třetí 12, před tímto překládáním muselo být 28 zápalek a na začátku 14 zápalek. Na první hromádce muselo být na začátku 14 zápalek, jež byly přeloženy na druhou hromádku, a 8 zápalek, jež tam byly před třetím tahem, tudíž celkem 22 zápalek.

38

Obr. 267.





Obr. 268 Obr. 269

39

Budeme postupovat takto:
1. Lokomotiva vjede do kruhu, vezme vůz *a* a vyveze ho na přímou kolej.
2. Lokomotiva přejede kolem dílny *D* a vytlačí ven i vůz *b*.
3. Lokomotiva vytáhne oba vozy na výhybku a zasune vůz *a* k cisterně *B*.
4. Lokomotiva vysune vůz *b* na přímou trať, vrátí se, vezme vůz *a* a odveze ho před cisternu *A*.
5. Nakonec lokomotiva objede celý okruh, zajede pro vůz *b*, přesune ho před cisternu *B* a vyjede na přímou trať.

40

Námořníci stáli zády k zábradlí a dívali se na sebe. Na poloze lodi přitom nezáleží.

41

Hostinský donesl 27 brambor. První pocestný snědl 9 brambor, tj. třetinu z 27, druhý pocestný snědl

6 brambor, tj. třetinu z 18 a třetí pocestný snědl 4 brambory, tj. třetinu z 12.

42

Jestliže stál přikoupený pozemek 1 000 Kčs, má plochu 500 m² (1 m² za 2 Kčs). Skládá se ze čtverce s plochou 100 m² a z dvou obdélníků, z nichž každý má plochu 200 m² a rozměry 10 m × 20 m (obr. 268). Strana původního pozemku je tudíž 20 m, jeho plocha 400 m². Celý pozemek má rozměry 30 m × 30 m a plochu 900 m²; jeho cena je 1 800 Kčs.

43

Bratři museli potkat jednu a tutéž elektriku. Domů přijeli tudíž všichni najednou jednou elektrikou.

44

Prodavač prodal košík s 29 vejci. Slepičí vejce byla v košících označených čísly 23, 12 a 5, kachní v košících s čísly 14 a 6.

45

Překládáme zápalky postupně takto: 5 — 1, 6 — 1, 9 — 3, 10 — 3, 8 — 14, 7 — 14, 4 — 2, 11 — 2, 13 — 15, 12 — 15.

46

Jeden z otců byl synem druhého. Nebyli tudíž čtyři, ale tři: dědeček, otec a vnuk. Dědeček dal synovi 150 Kčs a ten z nich dal vnukovi 100 Kčs.

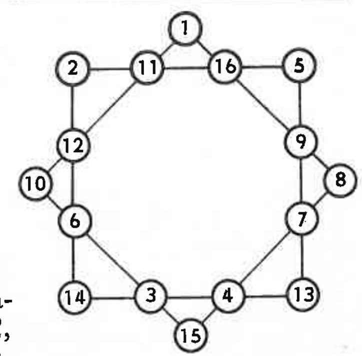
47

Čtyři láhve postavíme tak, aby jejich otvory ležely ve vrcholech čtyřstěnu. Obr. 269.

IX

1

Viz obr. 270.



Obr. 270

2

Např. takto:

$5 \times 5 + 5 = 30$
$3^3 + 3 = 30$

3

a) Tím, že žák násobil namísto osmnácti číslem 12, násobenec byl 6krát menší. Když však k součinu přičetl 24, dostal totéž číslo, jako by byl násobil číslem 18 a ze součinu odečetl 24. Tudíž 6násobek hledaného čísla se rovná 48 a hledané číslo je 8.

b) Dělením hledaného čísla třemi bychom dostali jeho třetinu. Násobením hledaného čísla třemi dostáváme číslo devětkrát větší, než měl být podíl. Jestliže po odečtení čísla 12 od trojnásobku hledaného čísla dostaneme týž výsledek jako po přičtení čísla 12 k třetině hledaného čísla, rozdíly ve výsledcích, které byly způsobeny nesprávným násobením, se odstranily další operací. Násobením třemi místo dělení se číslo zvětšilo o $\frac{8}{3}$. Odečtením čísla 12 od $\frac{8}{3}$ hledaného čísla a přičtením čísla 12 k $\frac{1}{3}$ hledaného čísla dostáváme týž výsledek. $\frac{8}{3}$ hledaného čísla je tudíž 24 a hledané číslo je 9.

4

Hledaná čísla jsou: 1, 2, 3.

5

947	+	198	=	1 145
—		—		:
650	:	130	=	5
297	−	68	=	229

6

Nejmenší dvojciferné číslo je 10, proto součet číslic hledaného čísla bude 10. Číslice desítek má být 3krát větší než číslice jednotek. Jestliže by byly jednotky vyjádřeny číslicí 1, desítky by musely být vyjádřeny číslicí 3. Stovky by však musely být vyjádřeny taktéž číslicí 1, má-li být splněna podmínka, že záměnou krajních číslic se číslo nezmění. Obě podmínky splní číslo 262.

7

$A = 5$; $B = 7$; $C = 12$; $D = 2$; $E = 6$; $F = 4$; $G = 10$; $H = 40$.

8

Chybný výsledek je 16krát menší než správný.

9

$1^2 = 1$, $11^2 = 121$, $111^2 = 12\,321$, $1\,111^2 = 1\,234\,321$;
$9^2 = 81$, $99^2 = 9\,801$, $999^2 = 998\,001$, $9\,999^2 =$
$= 99\,980\,001$.

a) Výsledky mocnin čísel 1^2, 11^2, 111^2, $1\,111^2$, atd. jsou zajímavé tím, že jsou utvořené číslicemi 1, 2, 3, 4 tak, že uprostřed je nejvyšší a ostatní jsou po obou stranách souměrně rozložené podle velikosti.

b) Výsledky mocnin čísel tvořených samými devítkami jsou vytvořené číslicemi 9, 8, 0 a 1. Přibýváním počtu v mocněnci přibývají devítky a nuly ve výsledku.

10

Úlohu je možno řešit např. takto (čísla píšeme tak, jak mají být v řádcích zleva doprava): 2, 1; 27; 18, 16, 14; 10, 19, 24, 9.

11

Rozdíl mezi oběma čísly je $280 - 40 = 240$. Aby se rozdíl rovnal nule, musíme k menšímu číslu přičíst a od většího čísla odečíst $240 : 2 = 120$. Jestliže máme přičítat a odečítat po 8, provedeme to 15krát, neboť $120 : 8 = 15$.

12

Konečné číslo po odečtení 14 je $(10a + b)$, kde a, b jsou myšlená čísla, což vysvětluje i zápis a výpočet úlohy $(5a + 7) \cdot 2 + b - 14 = 10a + 14 + b - 14 = 10a + b$.

13

a) $68 \cdot 48 + 68 \cdot 52 = 68 \cdot (48 + 52) = 68 \cdot 100$. Podobně je tomu i v ostatních příkladech.

b) $352 \cdot 18 : 9$ možno počítat tak, že číslo 352 násobíme dvěma (podíl $18 : 9$). Podobně je tomu i v ostatních příkladech.

14

Úloha má více řešení. Jedno z nich:

1. řádek: 7, 3, 2, 6
2. řádek: 1, 8, 5, 4
3. řádek: 4, 5, 8, 1
4. řádek: 6, 2, 3, 7

15

$$\frac{11}{1} + \frac{1}{1}, \quad \frac{22}{2} + \frac{2}{2}, \quad \frac{33}{3} + \frac{3}{3}, \ldots, \frac{99}{9} + \frac{9}{9}.$$

16

Použijeme-li jen celá a kladná čísla, najdeme pět případů: 14, 35; 20, 20; 30, 15; 60, 12; 110, 11.

17

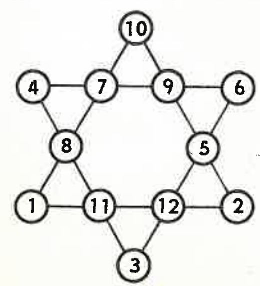
Viz obr. 271.

18

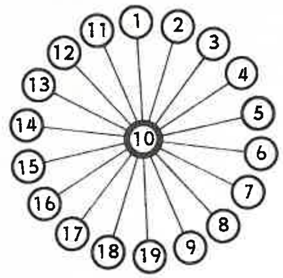
K napsání všech jednociferných čísel je třeba 9 úderů. Zůstává ještě 91 úderů, jimiž píše dvojciferná čísla. Platí $91 = 2 \cdot 45 + 1$. Písařka tudíž napíše ještě 45 dvojciferných čísel (poslední z nich je 54) a stým úderem píše první číslici čísla 55.

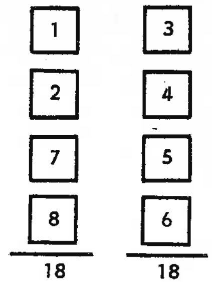
19

Všimněte si, že $19 + 1 = 20$, $18 + 2 = 20$, $17 + 3 =$



Obr. 271





Obr. 272

Obr. 273

= 20 atd. Číslo 10 vepišme do prostředku a sčítance uvedených součtů do protilehlých kroužků (viz obr. 272).

20

Vyměníte navzájem papírky s čísly 8 a 9 a kromě toho devítku obrátíte tak, aby z ní byla 6. (Obr. 273.)

21

Jsou to čísla 1, 2, 3, 4.

22

$111 - 11 = 100$
$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$
$(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100$

23

Číslo 5 040 je dělitelné uvedenými čísly, ale existuje ještě menší číslo, 2 520, v němž se všechna čísla nacházejí a jenž je jejich nejmenším společným násobkem.

25

2 025 a 9 801.

26

Je třeba připsat takové číslo, jehož číslice se doplňují s číslicemi jednoho z dříve napsaných čísel na 9. Poslední číslice součtu je potom zřejmě o 1 menší než poslední číslice toho sčítance, jehož číslice nedoplňujeme na 9. Všechny ostatní číslice v součtu budou stejné a ve stejném pořadí jako v tomto čísle. První číslice bude vždy 1.

27

Milión se pomocí devítek nejjednodušeji zapisuje takto:

$$\left(9 + \frac{9}{9}\right)^{9-\sqrt{9}}$$

28

Nechť má např. váš kamarád v pravé ruce desetihaléř a v levé pětihaléř. Trojnásobek sudého čísla je zase sudé číslo ($3 \cdot 10 = 30$). Dvojnásobek lichého čísla je sudé číslo ($2 \cdot 5 = 10$). Součet sudých čísel je zase sudé číslo.

Jestliže váš přítel drží v pravé ruce minci s lichým počtem haléřů, např. pětihaléř a v levé ruce desetihaléř, potom trojnásobek lichého čísla je liché číslo, zatímco dvojnásobek sudého čísla je sudé číslo. Součet sudého a lichého čísla je liché číslo.

Trik je možno obměnit tak, že počet haléřů v pravé ruce se násobí libovolným lichým číslem a v levé ruce libovolným sudým číslem.

29

1	2	3	4	6	7	8	9	0
E	*F*	*A*	*G*	*B*	*C*	*H*	*D*	*J*

30

Ani jedno z čísel 19, 17, 15 nemůže být sčítancem, protože k němu nenajdete ještě 7 sčítanců, aby celkový součet byl 20. Vezmeme-li číslo 13, musíme k němu přičíst sedmkrát číslo 1, aby celkový součet byl 20.

$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$11 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$9 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$9 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$7 + 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$7 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$7 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$
$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 20$
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 20$

Celkově je 11 řešení.
Nejvíce navzájem různých sčítanců obsahuje součet $7 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$, a to 4 různé sčítance: 7, 5, 3 a 1.

31

$1 = 77 : 77$
$2 = 7 : 7 + 7 : 7$
$3 = (7 + 7 + 7) : 7$
$4 = 77 : 7 - 7$
$5 = 7 - [(7 + 7) : 7]$
$6 = (7 . 7 - 7) : 7$
$7 = 7 + 7 . (7 - 7)$
$8 = (7 . 7 + 7) : 7$
$9 = 7 + (7 + 7) : 7$
$10 = (77 - 7) : 7$

32

a)	b)	c)	d)	e)
010	100	111	100	111
003	000	003	330	333
000	005	000	505	500
007	007	007	077	077
000	999	990	099	090
20	1 111	1 111	1 111	1 111

33

Číslici jednotek přeneseme do součinu beze změny. Ostatní číslice součinu dostaneme postupným sčítáním dvojic vedle sebe stojících cifer násobence.

Např. $352 . 11$
352
3 872

Bez násobení $352 . 11$
3 872

34

Do pravého trojúhelníka patří číslo 4; dostaneme ho jako podíl součinu dvou bočních čísel a spodního čísla $[(8 . 12) : 24 = 4]$.

35

Všechny ceny jsou dělitelné třemi, ale součet 53,50 není dělitelný třemi, proto je nesprávný.

36

Viz obr. 274.
Najděte další řešení.

37

Viz obr. 275.

38

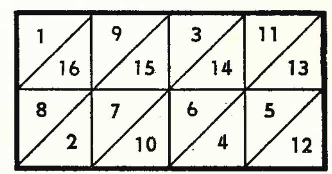
$88^2 = 7\,744$.

Obr. 274

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

12	6	7	9
13	3	2	16
1	15	14	4
8	10	11	5

Obr. 275



39

$2 + 2 = 2 \,.\, 2$
$1 + 2 + 3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$
$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 4$
$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 5$
$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 3$
$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$

Další zkuste sami. Vezměte např. čísla 2 a 6 a jejich součet 2 + 6 doplňte jednotkami na součin 2 . 6 = 12 a součin 2 . 6 potom vynásobte příslušným počtem jednotek.

$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 6 = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 6$ atd.

40

Vynecháme-li dvojice, v nichž jsou stejná čísla, jako např. 11 . 22 nebo 29 . 92, je celkem čtrnáct dvojic, z nichž 3 jsme uvedli v textu. Ostatních jedenáct je: 12 . 63, 12 . 84, 13 . 93, 14 . 82, 23 . 64, 24 . 63, 24 . 84, 26 . 93, 34 . 86, 36 . 84 a 46 . 96.

41

Označíme-li koncové body průměru písmeny a, a' a sousedního průměru písmeny b, b', podle podmínky příkladu musí platit $a - a' = b' - b$.
To je klíč ke všem řešením úlohy.
Všechna čísla od 1 do 10 je třeba rozdělit do 5 dvojic tak, aby všechny dvojice měly stejný rozdíl. Mohou to být jen dvě skupiny takových dvojic:

a) s rozdílem 1 jsou to čísla: 1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8; 9, 10;
b) s rozdílem 5 jsou to čísla: 1, 6; 2, 7; 3, 8; 4, 9; 5, 10.

Umístíme-li tato čísla na kružnici, dostaneme dvě základní řešení. Všechna ostatní řešení dostaneme ze základních řešení, budeme-li dvojice čísel přemísťovat z jednoho průměru na druhý.
V každé skupině dvojic existuje 24 řešení.

42

Vkládáním devítek mezi číslice 4 a 7 je možno vytvořit nekonečné množství takových dvojic. Podobně je možno rozšiřovat skupinku 24 + 3 nebo 263 + 2.

43

Číslo 12 345 679 je devítinou z 111 111 111.

44

Jestliže číslo 12 345 679 násobíme devíti, dostaneme 111 111 111. Při násobení číslem 18 (tj. 2 . 9) dostaneme dvakrát větší číslo, tj. 222 222 222, při násobení 27 (tj. 3 . 9) dostaneme číslo 333 333 333 atd.

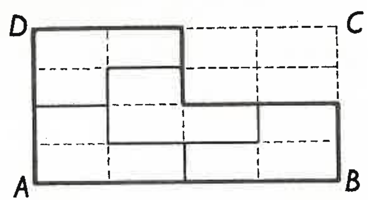
45

Nasbírali dohromady stejný počet hřibů, protože součet za 5 dní u každého má tytéž sčítance, jen v různém pořadí.

X

1

Viz obr. 276.



Obr. 276

2

Stovku napíšeme 6 devítkami takto:

$$\frac{999 - 99}{9}$$

3

Od poledne (12. hodiny) do půlnoci (24. hodiny) je 12 hodin. Těchto 12 hodin rozdělme na 4 části. Jedna část, tj. 3 hodiny, tvoří třetinu z 9 hodin, které ještě uplynou od třetí hodiny do půlnoci.
Nyní jsou tudíž 3 hodiny odpoledne.

4

Číslo 100 zapíšeme podle podmínky úlohy takto:

$$33 \,.\, 3 + \frac{3}{3}.$$

5

Z podmínky je zřejmé, že $\frac{1}{2}$ višní a $\frac{1}{4}$ jabloní je tolik, kolik je všech višní. Označme počet višní písmenem x. Potom jabloní je $360 - x$ a můžeme napsat

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(360 - x) = x$$

$$x = 120$$

Počet višní je tudíž 120 a jabloní 240.

6

Milión pomocí samých šestek možno napsat takto:

$$\left(\frac{66 - 6}{6}\right)^6$$

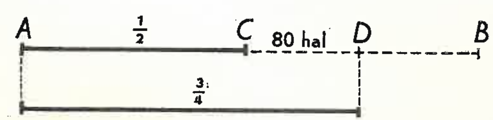
7

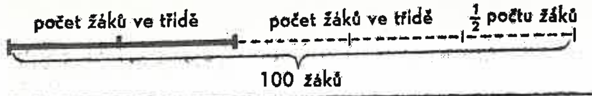
Znázorníme počet mých peněz úsečkou AB. Polovina z nich je úsečka AC. $\frac{3}{4}$ znázorňuje úsečka AD. Úsečka $CD = 80$ haléřů. $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}\right)$. Jestliže úsečka CD znázorňuje $\frac{1}{4}$ mých peněz, mám celkově $4 \,.\, 80$ hal $= 3{,}20$ Kčs, bratr $4{,}80$ Kčs. (Obr. 277.)

8

$$\frac{1999999}{9999995} = \frac{1}{5}.$$

Obr. 277





Obr. 278

9

$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ až do $\frac{9}{9}$.

10

Jestliže přešli $\frac{1}{3}$ cesty, zůstaly jim ještě $\frac{2}{3}$ cesty. O těchto $\frac{2}{3}$ víme, že je to tolik jako $\frac{1}{3}$ a ještě 12 km. Jenže těchto 12 km musí být právě $\frac{1}{3}$ cesty, takže celá cesta je 3 . 12 km = 36 km dlouhá.

11

$$37 = \frac{333}{3 \times 3}$$

12

a) $7 \cdot \frac{7}{6} = 7 + \frac{7}{6}$

$\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2}$

b) $6 \cdot \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{5} - \frac{3}{8}$

13

Z obr. 278 vidíme, že 100 je $\frac{5}{2}$ z celkového počtu. $\frac{1}{2}$ z cel-

kového počtu je $100 : 5 = 20$. Ve třídě bylo 40 žáků.
Řešení rovnicí: Ve třídě je x žáků.

$$x + x + \frac{x}{2} = 100$$
$$5x = 200$$
$$x = 40$$

14

Zůstalo 13 jablek, což je skutečně $\frac{1}{2}$ z 20 + 3 nebo $\frac{3}{5}$ z 20 + 1. Je to ještě $\frac{3}{4}$ z 20 − 2 atd.

15

Lev sežere za hodinu půl ovce, vlk $\frac{1}{3}$ ovce a liška $\frac{1}{6}$ ovce. Za hodinu tedy sežerou dohromady celou ovci, neboť

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 2 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

16

Je třeba jít na řešení jednoduše opačným postupem. K počtu 2 kanárků, kteří nakonec zůstali chovateli, přičteme $\frac{1}{2}$ a násobíme 2, dostaneme 5, přičteme znovu $\frac{1}{2}$ a násobíme 2, výsledek je 11, přidáme $\frac{1}{2}$ a po vynásobení 2 dostaneme 23. Chovatel měl původně 23 kanárků. Prvnímu zájemci prodal 12, druhému 6, švagrovi dal 3 a zůstal mu párek.

17

Ferda snědl polovinu zákusků, druhou polovinu, tj. 1 zákusek, nechal. Našel tudíž na talíři 2 zákusky. Ondřej též nechal druhou polovinu, tj. 2 zákusky. Našel tudíž na talíři 4 zákusky.

Jan nechal 4 zákusky, jestliže polovinu, tudíž 4 zákusky, snědl.
Na talíři bylo původně 8 zákusků.

18

Odpověděla správně, neboť $\frac{3}{5}$ ze $600 = 360$ a $\frac{2}{5}$ ze $600 = 240$.

19

100 let bez 1, tj. 99 let je jeho věk a polovina jeho věku. Polovina jeho věku je $\frac{1}{3}$ z 99, tj. 33. Celý věk je 66 let.

20

$$31 = 33 - 3 + \frac{3}{3}$$

$$31 = 33 - \frac{3+3}{3}$$

21

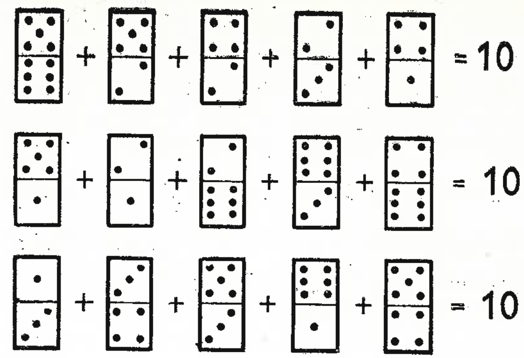
Označme počet všech vajec písmenem x.
První kupec koupil $\frac{1}{2}x + 1$.
Druhý kupec koupil $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 1$.
Třetí kupec koupil $\frac{1}{8}x - \frac{6}{8} + 1$.
Zůstalo 5.
Do města donesla 54 vajec.

22

Jedno ze správných řešení úlohy vidíte na obr. 279.

23

Celou cestu si znázorníme úsečkou AB libovolné velikosti (obr. 280). Ve spánku ujel vzdálenost znázorněnou



Obr. 279

úsečkou DC, z níž $\frac{1}{5}$ znázorněná úsečkou CB tvoří s cestou, kterou ujel ve spánku, druhou polovinu celé cesty. Cestující ujel ve spánku $\frac{5}{12}$ celé cesty.

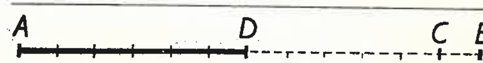
24

Dešifrované zlomky budou vypadat takto:

$$\frac{225}{45} = 5 \qquad \frac{22225}{4445} = 5$$

25

Za 24 hodin předbíhají hodinky správný čas o $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ minuty. Zdálo by se tudíž, že o 5 minut předběhnou správný čas za $5 : \frac{1}{6} = 30$ (dní), tj. že napřed



Obr. 280

o 5 minut půjdou 31. května ráno. To však není pravda. Jestliže dne 31. května ráno předbíhaly podle výpočtů správný čas o 5 minut, večer 30. května podle podmínek uvedených v příkladě předbíhaly o $5\frac{1}{3}$ minuty. Ráno 30. května ukazovaly o $5\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 4\frac{5}{6}$ více. Večer 29. května předbíhaly správný čas o $5\frac{1}{6}$ min. Ráno 29. května se předbíhaly o $5\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 4\frac{2}{3}$ minuty. Večer 28. května se předbíhaly již právě o 5 minut.

Výpočtem:

Za 27 dní se předběhnou hodinky o $27 \cdot \frac{1}{6} = 4\frac{1}{2}$ minuty, to znamená, že 28. května ráno budou předbíhat správný čas o $4\frac{1}{2}$ minuty. Jestliže se přes den předbíhají o $\frac{1}{2}$ minuty, již večer téhož dne půjdou napřed o 5 minut.

26

Objem koule je $\frac{4}{3}\pi r^3$, objem válce je $2\pi r^3$. Objem koule k objemu válce je v poměru 2 : 3.

27

Vzdálenost od STS k železniční stanici je $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ celé cesty, kterou měl Jenda ujít. Tuto vzdálenost ušel za 5 minut. Celá cesta mu trvala 12 . 5 = 60 minut čili 1 hodinu. $\frac{1}{4}$ cesty ušel za 60 : 4 = 15 (minut). Z domu tudíž vyšel v 7 h 15 min a do školy přišel v 8 h 15 min.

28

Když Karel ušel $\frac{1}{4}$ cesty, bylo 7,30 h, když ušel $\frac{1}{3}$ cesty, bylo 7,35 h. Ušel $\frac{1}{12}$ cesty za 5 minut, celá cesta trvala 60 minut. Přišel tudíž na místo ve stejném čase jako Igor.

29

Za $3\frac{1}{2}$ hodiny se budík opozdil o 14 minut, proto nyní ukazuje 11 h 46 min. Do 12. hodiny však ještě chybí 14 minut. Za tuto dobu se ještě zpozdí téměř o minutu, takže na budíku bude 12 hodin téměř za 15 minut.

30

Pavel zoral první den $\frac{2}{3}$ plochy, zůstala mu $\frac{1}{3}$, kterou zoral za polovinu druhého dne. Karel zoral první den $\frac{1}{6}$ plochy, zůstalo mu $\frac{5}{6}$. Aby skončil současně s Pavlem (za půl dne), musel by svůj výkon 10krát zvýšit.

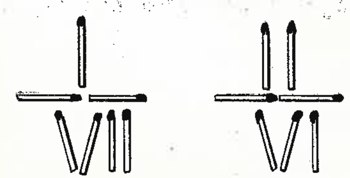
31

Viz obr. 281.

32

$$\frac{5\,832}{17\,496} = \frac{1}{3}, \quad \frac{4\,392}{17\,568} = \frac{1}{4}, \quad \frac{2\,769}{13\,845} = \frac{1}{5},$$

Obr. 281



$$\frac{2\,943}{17\,658} = \frac{1}{6}, \quad \frac{2\,394}{16\,758} = \frac{1}{7}, \quad \frac{3\,187}{25\,496} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{6\,381}{57\,429} = \frac{1}{9}.$$

33

Např. přičteme k čitateli i k jmenovateli zlomku $\frac{1}{3}$ číslo 3; dostaneme skutečně dvojnásobek zlomku $\frac{1}{3}$, tj. $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{1+3}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$.

Zlomek, jenž po přičtení jmenovatele k čitateli i k jmenovateli se ztrojnásobí, je

$$\frac{1}{5}; \left(\frac{1+5}{5+5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}\right).$$

Jestliže totéž provedeme se zlomkem $\frac{1}{7}$, zlomek se zvětší čtyřikrát.

$$\left(\frac{1+7}{7+7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}, \quad \frac{4}{7} = 4 \cdot \frac{1}{7}\right).$$

34

Číslo 40 je v druhém případě 100 %. Číslo 8, jež udává, o kolik jednotek je číslo 32 menší než číslo 40, je 20 %. Číslo 32 je tudíž o 20 % menší než číslo 40.

Poznámka: V prvním případě bylo za 100 % považováno číslo 32. Číslo 8, o něž je číslo 40 větší než 32, je $\frac{1}{4}$ čísla 32, což je 25 %.

35

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

36

V každém metrickém centu čerstvě vykopaného uhlí jsou 2 kg vody, takže úplně suchého uhlí by bylo 98 kg. Vlivem povětrnostních poměrů obsahuje uhlí později 13 % vody, tudíž 87 % suchého uhlí, proto vznikne z každého metrického centu taková váha, jejíž 87 % se rovná 98 kg.

Počítejme: 98 : 87 $\doteq$ 1,126, což je 1 %. Váha stejného množství uhlí vzroste z původních 100 kg přibližně na 112,6 kg, tj. asi o 12,6 %.

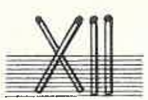
37

Žádnými vynálezy není možno ušetřit 100 % paliva, neboť energie nemůže vzniknout z ničeho. Jestliže se např. použitím vynálezu spotřebovalo 100 kg paliva, po použití vynálezu, který umožňuje ušetřit 30 % paliva, spotřebuje se 70 kg paliva. Jestliže další vynález (nezávislý na prvém) umožňuje ušetřit 45 % paliva, musíme počítat 45 % ze 70 kg. To je 0,45 . 70 = 31,5 (kg). Použitím obou vynálezů se ušetří 30 + 31,5 = 61,5 (kg). Dalším vynálezem (nezávislým od ostatních) se ušetří 25 % z 38,5 kg, což je 0,25 . 38,5 = 9,625 (kg). Celková úspora je 30 + 31,5 + 9,625 = 71,125 (kg), tj. 71,125 %. Pořadí výpočtů je možno zaměnit, konečný výsledek zůstane beze změny. Jestliže jeden vynález závisí na druhém, může se stát, že úspora při použití všech tří vynálezů bude stejná jako při použití nejúčinnějšího vynálezu.

38

Použijeme-li římských číslic, bude 7 polovina z 12. (Obr. 282.)

Obr. 282



39

Sčítáme-li $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, dostaneme 1.

Proto sečteme-li polovinu myšleného čísla, jeho třetinu a šestinu, dostaneme myšlené číslo.

40

Jestliže je možné např. před snížením koupit za 1 korunu předmět, po snížení jeho ceny na 70 haléřů bude možno za 1 Kčs koupit $\frac{100}{70} = \frac{10}{7}$ předmětu, což je o $\frac{3}{7}$ víc než před snížením. Po snížení cen zboží bude možno nakoupit o $\frac{3}{7}$ víc, což je přibližně 43 %.

Koupěschopnost se tudíž zvýší více než o 30 %, zvýší se přibližně o 43 %.

XI

1

Podle podmínek úlohy ujel kůň 1 km první poloviny cesty za $\frac{1}{12}$ h = 5 minut, 1 km druhé poloviny cesty za $\frac{1}{4}$ h = 15 minut. Na tyto 2 km tudíž potřeboval 20 min, což je $\frac{1}{3}$ hodiny a na 1 km potřeboval průměrně $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$ hodiny. Šel-li tudíž průměrnou rychlostí 6 km za hodinu, došel do cíle v témž čase jako poprvé.

2

Města jsou od sebe vzdálená 260 km.

3

Zatímco hydroplán uletí 10 km, uplave loď 1 km. Jestliže hydroplán přeletí 600 km, uplave loď 60 km. Hydroplán bude 600 km od pobřeží, i loď bude 540 + + 60 = 600 km od břehu, to znamená, že hydroplán dohonil loď. Bylo to ve vzdálenosti 600 km od pobřeží.

4

Dva vlaky jedou vedle sebe 54 vteřin.

I. vlak .... 60 km/h .... za 1 s .... $16\frac{2}{3}$ m

II. vlak .... 40 km/h .... za 1 s .... $11\frac{1}{9}$ m

$$16\frac{2}{3} - 11\frac{1}{9} = 5\frac{5}{9}$$

I. vlak jede rychleji o $5\frac{5}{9}$ m/s než II. vlak.

$$200 + 100 = 300$$

$$300 : 5\frac{5}{9} = 300 \,.\, \frac{9}{50} = 54$$

5

Jestliže počet hodin, kdy pojedou na kole, označíme písmenem x a počet hodin, kdy půjdou pěšky písmenem y, dráhu každého je možno napsat rovnicí $15x + 5y = 60$. Poměr časů, kdy přejdou tutéž vzdálenost pěšky i na kole, je $y : x = 3$ čili $y = 3x$. Z toho $30x = 60$ a $x = 2$. To znamená, že musel každý z nich jet na kole 2 hodiny a 6 hodin jít pěšky. Každému tudíž trvala celá cesta 8 hodin. Jinak by musel jeden z nich jít pěšky 12 hodin. Mohou se střídat, kde chtějí, neboť jakmile každý z nich pojede na kole 2 hodiny a 6 hodin půjde pěšky, po uplynutí 8 hodin dorazí oba do cíle.

6

Vlaky budou od sebe vzdálené 100 km.

7

Osobní parník jel rychleji než motorový člun o $24 - 15 = 9$ km/h. Za 3 hodiny proto parník předjel člun o $3 \,.\, 9 = 27$ km.

Za 7 hodin ujel parník o $7 \,.\, 9 = 63$ km více než motorový člun. Za 10 hodin předjel parník člun o 90 km.

Tuto vzdálenost ujel motorový člun za $90 : 15 = 6$ (hodin).

Parník se zdržel na mělčině 6 hodin.

8

Dva cyklisté budou po setkání za dvě hodiny od sebe vzdáleni 70 km. (První ujel po setkání za 2 hodiny dráhu $s_1 = v_1 t = 15 \,.\, 2 = 30$ km, druhý ujel za 2 hodiny dráhu $s_2 = v_2 t = 20 \,.\, 2 = 40$ km, čili celkově jsou vzdáleni 70 km.)

9

Vzdálenost mezi psem a králíkem je 150 stop. Jedním skokem se zkracuje o $(9 - 7) = 2$ stopy. Vzdálenost 150 stop se sníží na nulu po $150 : 2 = 75$ skocích.

10

První přijede do Archangelska za $840 : 84 = 10$ h, druhý za $840 : 56 = 15$ h. Jestliže první přijede do Archangelska, druhému zbývá ještě projet 280 km. Jestliže se první obrátí, setkají se potom za 2 hodiny $[280 : (84 + 56) = 2]$. Setkají se ve vzdálenosti 168 km od Archangelska.

11

Za 1 hodinu ujela loďka a parník dohromady $(4 + 16) = 20$ (km). Vzdálenost 120 km překonala obě plavidla za $120 : 20 = 6$ (hodin). Za 6 hodin ujede loďka $6 \,.\, 4 = 24$ (km) a parník 96 km.

12

Kolona projede rychlostí 30 km/h 1 km za 2 minuty, rychlostí 20 km/h za 3 minuty. Při rychlosti 20 km/h se tudíž kolona opozdí po každém kilometru o 1 min. Jestliže celkové zpoždění je 120 minut, vzdálenost, z níž kolona aut vyrazila, je 120 km. Rychlostí 30 km/h by projela kolona aut celou vzdálenost za 4 hodiny; rychlostí 20 km/h za 6 hodin. Kolona vyrazila o 6. hodině. Jestliže má dojet do cíle o 11. hodině, má vzdálenost 120 km projet za 5 hodin. Musí tudíž jet rychlostí 120 km : 5 = 24 km/h.

13

První auto dojelo do cíle za 120 min, druhé za 125 min. První auto ujelo vzdálenost 200 km rychlostí 100 km/h za čas $t = \frac{s}{c} = \frac{200\text{ km}}{100\text{ km/h}} = 2\text{ h} = 120$ minut.

Druhé auto ujelo první polovinu cesty, tudíž 100 km při rychlosti 120 km/h, za čas $t_1 = \frac{100\text{ km}}{120\text{ km/h}} = \frac{10}{12}$ h a druhou polovinu cesty, tudíž 100 km při rychlosti 80 km/h, za čas $t_2 = \frac{100\text{ km}}{80\text{ km/h}} = \frac{10}{8}$ h.

Celou vzdálenost 200 km ujelo druhé auto za čas $t = \left(\frac{10}{12} + \frac{10}{8}\right)\text{ h} = \frac{50}{24}\text{ h} = 125$ min.

14

Za 5 hodin ujel automobil 5 . 40 = 200 (km). Jezdec ujel 200 − 140 = 60 (km). Vzdálenost mezi městy je 260 km.

15

Cestující se vzhledem k jedoucímu prvnímu vlaku pohyboval rychlostí 45 + 36 = 81 (km/h),

čili $\frac{81\,000}{60\,.\,60}$ (m/s) $= \frac{45}{2}$ (m/s).

První vlak byl tudíž $\frac{45}{2} \,.\, 6 = 135$ metrů dlouhý.

16

Jestliže se zdravili strojvůdci, jsou konce vzdálené 500 m

a pohybují se proti sobě rychlostí 90 km/h; potkají se tudíž za 20 vteřin.

17

Písmenem x označme rychlost člunu proti proudu a písmenem y rychlost vody. Z podmínek úlohy dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} 4\,(x+y) &= 100 \quad /:\ 4 \\ 10\,(x-y) &= 100 \quad /:10 \\ \hline x+y &= 25 \\ x-y &= 10 \\ \hline 2x &= 35 \\ x &= 17{,}5 \\ y &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Rychlost člunu proti proudu je 17,5 km/h, rychlost vody je 7,5 km/h.

18

Celý vlak (od lokomotivy ke konci vlaku) ujede vzdálenost 400 m (perón) za 33 vteřin. Vlak přejede kolem železničáře za 8 vteřin; 400 m tudíž ujede za 33 − 8 = = 25 (s). Jede tudíž rychlostí 16 m/s, tj. 57,6 km/h, vlak je dlouhý 16 . 8 = 128 (m).

XII

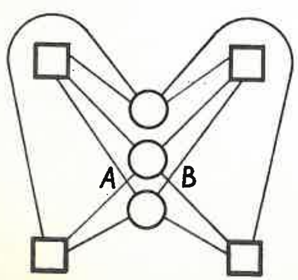
1

Dopravu možno uspořádat různými způsoby. Jeden z nich je znázorněn na obr. 283.

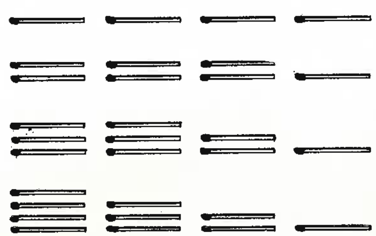
2

Viz obr. 284.

Obr. 283



Obr. 284



3

Jestliže 5 zedníků vykonalo za 14 dní polovinu práce, jeden zedník vykoná za 1 den zhruba $\frac{1}{140}$ práce. Za 6 dní vykoná 5 zedníků $\frac{5 \cdot 6}{140} = \frac{3}{14}$ práce. Zůstává ještě vykonat $1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{14} = \frac{2}{7}$ práce. Počet zedníků, kteří tuto část vykonají za 6 dní, vypočteme tak, že dělíme

$$\frac{2}{7} : \frac{6}{140} = \frac{2}{7} \cdot \frac{140}{6} = 6\frac{2}{3}.$$

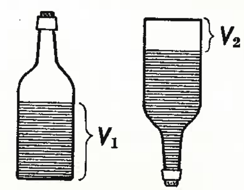
Na stavbu je potřeba přidělit dalších 7 zedníků.

4

Nejdříve odměřte vnitřní poloměr dna r a z výšky vody v_1 vypočítáte celkový objem vody, $\pi r^2 v_1$. Potom láhev obrátíte dnem nahoru a stejně odměříte výšku vzduchového sloupce v_2. Celkový objem láhve je $\pi r^2 (v_1 + v_2)$. (Obr. 285.)

5

Lakomý člověk zaplatil za studnu 2 621,43 Kčs. Za 1 m platil 1 haléř, za 2 m 2 haléře, za 3 m 4 haléře atd. Jsou to celkově tyto položky v haléřích:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, 4 096, 8 192, 16 384, 32 768, 65 536, 131 072.
Po sečtení dostaneme 262 143 haléřů, tj. 2 621, 43 Kčs.



Obr. 285

6

Přepravit se s malou plachetnicí na druhý břeh řeky, není-li nablízku most, je možno takto: První se normálně přepraví na druhý břeh a loďku zatáhne kus proti proudu, upraví šikmo plachtu, takže proud sám dopraví plachetnici na druhý břeh, kde ji může použít náš přítel. Takto je možno uskutečnit přepravu libovolného počtu osob.

7

7 lidí mělo po 7 kočkách, tj. 49. Každá sežere 7 myší, čili 49 . 7 = 343. Každá myš sežere 7 klasů ječmene, všechny tudíž sežerou 343 . 7 = 2 401 klasů, z nichž může vyrůst 2 401 . 7 = 16 807 měřic ječmene.

8

Vrátný vůbec vynechal druhého hosta.

9

540 000 000.

10

Při logickém postupu první hráč stále útočí, ale může vyhrát jen chybou druhého, jinak zůstává hra nerozhodná.

11

Součin jednomístného čísla a 9 je dvojmístné číslo, v němž součet číslic je 9. Odečteme-li je od desetinásobku zvoleného čísla, má zbytek tu vlastnost, že první dvě číslice tvoří číslo o tolik menší, kolik je na posledním místě.

12

Do poháru nalejeme vodu, potom do ní nasypeme broky a odměříme, o kolik stoupla voda. Takto zjistíme objem olova.

13

Za 5 hrušek zaplatila Anička o 5 . 45 haléřů víc než Mařenka za 5 jablek. Tato částka připadá na 3 jablka, takže 1 jablko stojí 225 : 3 = 75 haléřů a jedna hruška 1,20 Kčs.

14

Z podmínek úlohy vyplývá, že v rozích velkého čtverce musí být rozličná písmena. Napíšeme je v libovolném pořadí. Ve středních čtverečcích úhlopříčky, na níž již leží písmena *a*, *d*, musí být písmena *b*, *c*. Můžeme je tam umístit dvojím způsobem. Máme-li takto vyplněno 6 čtverečků, ostatní doplníme podle podmínek úlohy. Úloha má celkem 48 možných řešení. 2 možnosti jsou na obr. 286.

15

Větší je 10^{20}, protože $20^{10} = (2 \cdot 10)^{10} = 10^{10} \cdot 2^{10}$ a $10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10}$.

16

Číslo 89^{98} je větší než 98^{89}. Při takovém porovnání má rozhodující význam mocnitel, např. $2^5 > 5^2$, podobně $2^8 > 8^2$.

17

Složení není správně nakreslene. Díly *A*, *B*, *C*, *D* nevy-

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

a	d	b	c
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

Obr. 286

plňují daný obdélník. Dá se to zjistit lehce při velmi přesném rýsování a dobrém pozorování. Trojúhelník *MRS* není podobný trojúhelníku *MNO*, neboť
$3 : 8 \neq 5 : 13.$

18

Z prvního dolejeme do třetího 1 litr. Z takto doplněného třetího přelejeme 2 litry do druhého a v třetím zůstane litr.

19

Tabulka všech střetnutí:

1.	*AC*	*DF*	*BE*
2.	*BD*	*AE*	*CF*
3.	*AF*	*BC*	*DE*
4.	*CD*	*AB*	*EF*
5.	*AD*	*BF*	*CE*

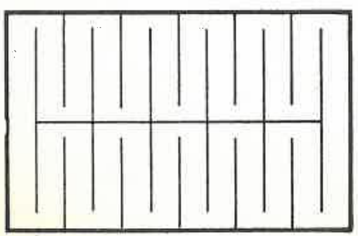
20

Jestliže pohlednici rozstříháte podle obr. 287, vznikne otvor, kterým se lehce provléknete.

21

a) $44 + \frac{44}{4}$

b) $9 + \frac{99}{9}$



Obr. 287

22

Rolník nasypal rýži do pytle hostinského, pytel zavázal a obrátil na ruby. Z druhé strany nasypal fazole. Potom pytel rozvázal a vrátil rýži zpět do svého pytle.

23

Z třísek 6 odlitků možno vyrobit jeden další odlitek. Z třísek 36 odlitků možno tudíž vyrobit 6 nových odlitků a z třísek těchto 6 nových odlitků ještě jeden další. Celkově tudíž možno vyrobit 43 součástek.

24

Všech rozličných čtverců je 30.
Se stranou 4 1
se stranou 3 4
se stranou 2 9
se stranou 1 16

25

Cyklista šel pěšky $\frac{1}{3}$ cesty, tj. polovinu toho, co ujel na kole. Potřeboval však k tomu dvojnásobný čas. K překonání vzdálenosti, kterou ujel na kole, by potřeboval 4krát delší čas. Potřeboval-li na to 4krát kratší čas, musel jít 4krát rychleji.
Na kole jel 4krát rychleji.
Např. jestliže na kole ujel $\frac{2}{3}$ cesty za 2 hodiny, na $\frac{1}{3}$ cesty by potřeboval 1 hodinu. Pěšky by však tuto vzdálenost překonal za 4 hodiny. Pěšky šel 4krát pomaleji.

26

Postup byl následovný:
1. 2 zbrojnoši na druhý břeh,
2. jeden se vrátí a převeze třetího zbrojnoše,
3. jeden se vrátí a odjedou 2 princové,
4. zpět pojede jeden princ a jeden zbrojnoš,

5. na druhý břeh se převezou dva princové,
6. zbývající 2 zbrojnoše postupně odveze třetí zbrojnoš.

27

Hra není spravedlivá. První hráč musí vždy vyhrát, jestliže položí peníz přesně doprostřed stolu. Položí-li druhý hráč peníz kamkoli, může první vždy položit svůj další peníz souměrně s ním, takže mu zůstane poslední tah.

28

Obsah druhého a čtvrtého poháru přelejeme do sedmého a devátého.

29

Po prvním útoku zůstalo v pevnosti 36 chlapců. Do první a třetí řady dal velitel po 11 chlapcích, takže do střední řady zůstalo po 7 chlapcích. Rozložení sil před každým útokem je znázorněno na obr. 288 (v prostředku je zapsán celkový počet obránců).

30

Jsou to čísla 1 a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ atd. Vidíme, že jsou to zlomky, s čitatelem 1 a s jmenovateli rozdílnými o jednotku. Všeobecně to můžeme napsat takto: $\frac{1}{n}$ a $\frac{1}{n+1}$, kde n je přirozené číslo.

Tuto vlastnost mají i čísla x a $\frac{x}{x+1}$, jestliže $x \neq -1$.

Obr. 288

2	7	2
7	36	7
2	7	2

3	5	3
5	32	5
3	5	3

4	3	4
3	28	3
4	3	4

5	1	5
1	24	1
5	1	5

5		6
	22	
6		5

31

Kdybychom pozorovali vlak, jedoucí proti nám, ze stojícího vlaku, byl by výpočet správný. Náš vlak však jede opačným směrem a jestliže od setkání našeho vlaku s jedním protijedoucím vlakem uběhlo 5 minut, znamená to, že druhý vlak přijede na místo, kde jsme se setkali s prvním, za dalších pět minut. Vlaky jedoucí opačným směrem tudíž přijíždějí do města po 10 minutách.
Za hodinu přijede do města nikoli 12, ale 6 vlaků.

32

Generál ráno vybral kuličku a dříve než se na ni podíval, snědl ji. „Zjistěte, jaká byla,“ žádal své soudce. Protože zůstala černá kulička, museli ho propustit.

33

Svaření je lacinější o 3,43 Kčs, jestliže rozsekneme tročlánkovou část a jednotlivými články spojíme ostatní čtyři části. Rozseknutí 3 článků stojí 3 . 43 = 129 (haléřů). Opětné svaření 3 kousků stojí 3 . 126 = 378 (haléřů), dohromady 507 haléřů. Nový řetěz by stál 8,50 Kčs, starý po svaření 5,07 Kčs. Rozdíl je tudíž 3,43 Kčs.

34

Předpokládejme výšku člověka 175 cm. Označíme-li poloměr Země R, dostaneme pro dráhu hlavy $2 \,.\, 3{,}14 \,.\, (R + 175)$. Nohy vykonají dráhu $2 \,.\, 3{,}14 \,.\, R$. Hlava tudíž vykoná o $[2 \,.\, 3{,}14 \,.\, (R + 175) - 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, R]$ (cm) více než nohy. Po vypočtení dostaneme, že je to asi 1 100 cm, tj. asi 11 m. Překvapující je to, že výsledek vůbec nezávisí na poloměru koule. Je tudíž stejný na obrovském Slunci i na maličké kouli.

XIII

1

Viz obr. 289.

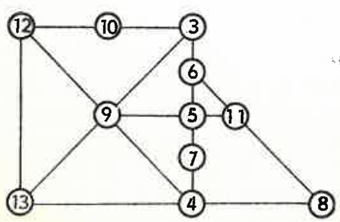
2

Do vrcholů čtverce musíte položit po dvou mincích (jednu na druhou).

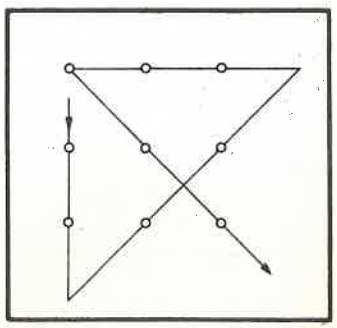
3

Jedno z možných řešení je na obr. 290.

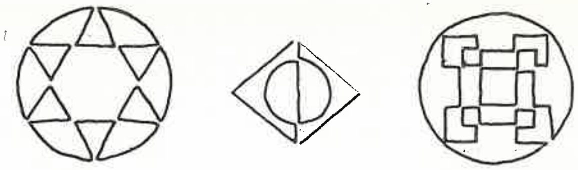
Obr. 289



Obr. 290



Obr. 291



Obr. 292

13	67	31
61	43	7
37	1	73

4

Neřešitelné jsou b) a f).

5

Viz obr. 291.
Kresba č. 2 se nedá nakreslit.

6

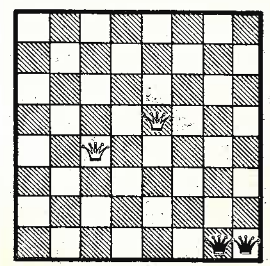
Viz obr. 292.

7

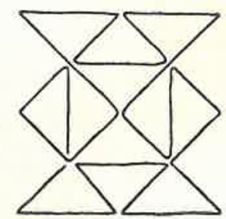
Nejvíce polí obsadí dvě dámy, jestliže stojí ve středu šachovnice ve vzdálenosti kroku jezdce — 42 polí; nejméně polí obsadí, stojí-li kdekoliv v rohu vedle sebe — 33 polí. Viz obr. 293.

8

Viz obr. 294.



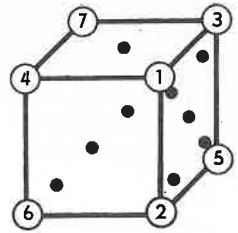
Obr. 293



Obr. 294

Obr. 295

4	48	3	49	5	44	22
14	11	40	41	38	23	8
29	16	18	33	24	20	35
43	37	31	25	19	13	7
15	30	26	17	32	34	21
42	27	12	9	10	39	36
28	6	45	1	47	2	46



Obr. 296

9

Úloha má více řešení. Jedno z nich vidíte na obr. 295.

10

Třetí a čtvrtá kostka domina v pořadí má být 0/3 a 1/1.

11

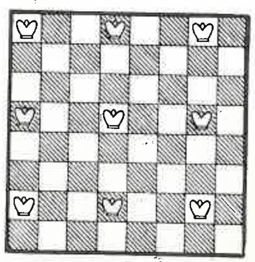
Číslice vepíšeme do rohu krychle podle obr. 296.

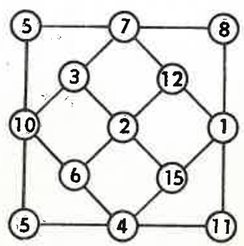
12

Viz obr. 297.

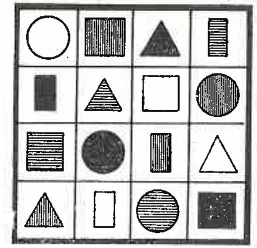
13

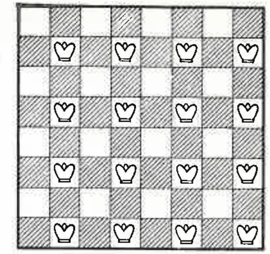
Viz obr. 298.


Obr. 297



Obr. 298


Obr. 299


Obr. 300

14

Řešení je víc. Jedno z nich:

5 + 7 — 0		3 — 2 — 7
1 — 3 — 8	nebo	1 — 6 — 5
6 — 2 — 4		8 — 4 — 0

15

Obrázkový magický čtverec řešíme podle obr. 299.

16

Viz obr. 300.

17

Řešení magického čtverce má několik stejných alternativ. Jedna z nich je na obr. 301.

18

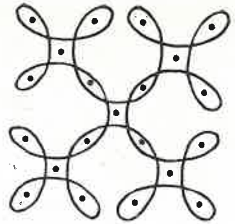
Jedním tahem se dají nakreslit obrazce č. 1 a 3.

5	184	294	335
390	239	129	60
349	280	170	19
74	115	225	404

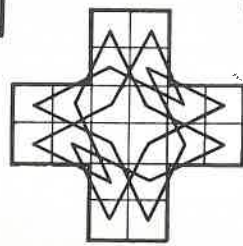
Obr. 301

72	147	42
57	87	117
132	27	102

Obr. 302



Obr. 303



Obr. 304

19

Viz obr. 302.

20

1. g5! Ke6! 2. g × h6, Kf6. 3. Kc2, c4. 4. Kc1 . . . a bílý vyhraje, neboť svým králem sebere postupně tři spojené pěšce a černý král je donucen uvolnit bílému své pěšáky.

21

Při kreslení ornamentu jedním tahem si pomůžeme tečkami. Potom již jde kreslení velmi lehce. (Obr. 303.)

22

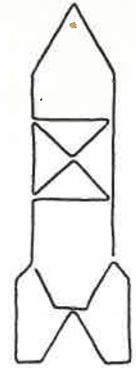
Jezdec přejde všechna pole šachovnice podle obr. 304.

23

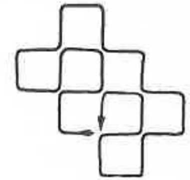
Jde o magický čtverec známý již ve středověku:

2 7 6
9 5 1
4 3 8

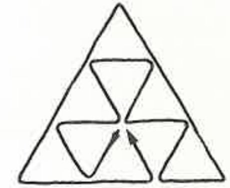
Všemi směry dostaneme součet 15.



Obr. 305



Obr. 306



Obr. 307

24

Viz obr. 305.

25

Magický čtverec z písmen a čísel můžeme sestavit takto:

*C*1	*A*2	*B*3	*D*4
*D*3	*B*4	*A*1	*C*2
*B*2	*D*1	*C*4	*A*3
*A*4	*C*3	*D*2	*B*1

26

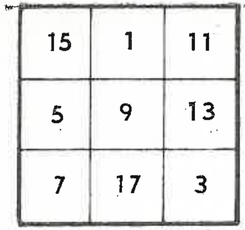
Viz obr. 306.

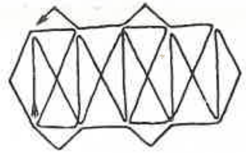
27

Ve čtverci stačí spodní řada (3, 1, 2) přemístit nad první řadu a vyhovíme daným podmínkám.

28

Viz obr. 307.





Obr. 308 Obr. 309

29

Řešení podle šachovnice.
1. cesta: D3, E5, G6 — 3 tahy,
2. cesta: D1, F2, H3, F4, G6 — 5 tahů,
3. cesta: C4, A5, C6, D8, F7, E5, G6 — 7 tahů,
4. cesta: A4, B6, C8, D6, E4, F2, G4, E5, G6 — 9 tahů.

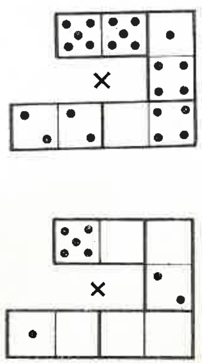
30

Jednou z možností je poskládat čísla tak, že vodorovně dostaneme:
13452 — 35241 — 24315 — 41523 — 52134.
Celkový součet je 15.

31

Viz obr. 308.
Najděte další řešení.

Obr. 310a, b

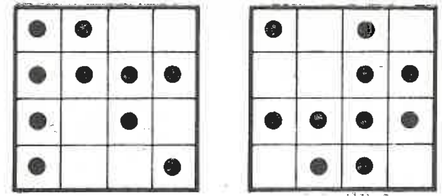


32

Viz obr. 309.

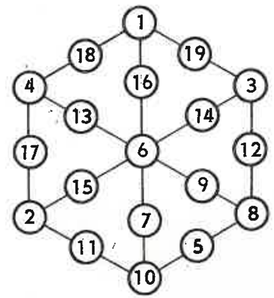
33

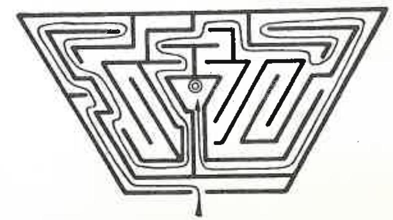
Pomocí domina můžeme takto znázornit několik úloh na násobení (zjistili jste možná, že jich je 7). Na obr. 310a, b jsou například dvě taková řešení.



Obr. 311 Obr. 313

Obr. 312 Obr. 314





34

Dvě z možných řešení jsou na obr. 311.

35

Sehráli 13 partií.

36

Viz obr. 312.

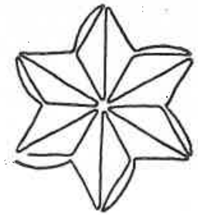
37

Jedno řešení je na obr. 313.

38

Cesta zahradním bludištěm je na obr. 314. Takové úlohy je nejlépe řešit opačným postupem.

Obr. 315



Obr. 316

Obr. 317

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Obr. 318

1	12	14	7
15	6	4	9
8	13	11	2
10	3	5	16

39

Viz obr. 315.

40

Viz obr. 316.

41

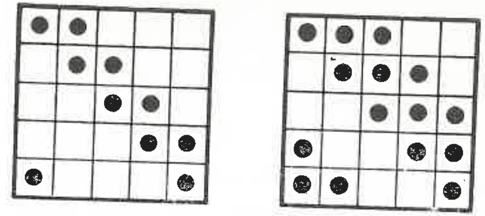
36 trojúhelníků.

42

Viz obr. 317.
Zkuste sami vytvořit nové magické čtverce tak, že všechna čísla v daném čtverci několikrát zvětšíte nebo zmenšíte o totéž číslo.

43

$$\begin{array}{ccccc} 540 & - & 391 & = & 149 \\ + & & : & & - \\ 104 & + & 17 & = & 121 \\ \hline 644 & : & 23 & = & 28 \end{array}$$



Obr. 319

Obr. 320

44

Viz obr. 318.
Zkuste sami vytvořit z daného magického čtverce několik nových čtverců zvětšením nebo zmenšením každého čísla tohoto čtverce o několik jednotek anebo několikrát.

45

Kolečka podle podmínek úlohy zakreslíme do sítě podle obr. 319.

46

Viz obr. 320.

47

$$\begin{array}{ccccc} 1\,207 & - & 505 & = & 702 \\ : & & + & & - \\ 17 & \times & 7 & = & 119 \\ \hline 71 & + & 512 & = & 583 \end{array}$$

48

$$\begin{array}{ccccc} 768 & - & 258 & = & 510 \\ : & & + & & - \\ 16 & \times & 12 & = & 192 \\ \hline 48 & + & 270 & = & 318 \end{array}$$

49

Vchodem *D* je možno se dostat do vnitřního prostoru stadiónu.

50

Jako výchozí postavení koně můžeme zvolit A1, A5, C1, C5 a podobně. Všechny pěšce sebere v 16 tazích. Např.: B3, D2, C4, B2, D3, B4, D4, E6, G5, F7, E5, G6, E7, F5, G7.

XIV

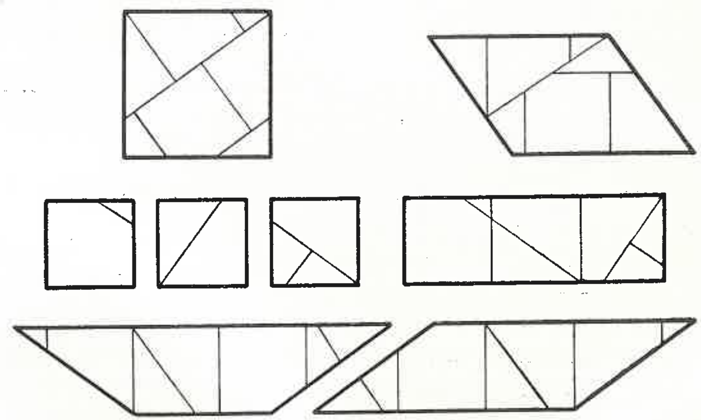
1

Viz obr. 321.

2

Na vkladní knížce mu zůstalo 50 Kčs.

Obr. 321



Nechť je začáteční vklad jakýkoli, zůstane vždy polovina toho, co bylo vloženo po výhře, v našem případě $\frac{1}{2}$ ze 100, tj. 50 Kčs.

Vysvětlení: Označme počáteční vklad x; po 100 % výhře dostáváme $2x$. Další vklad označme y. Na knížce je tudíž $2x + y$. Polovina z toho je $x + \frac{y}{2}$ a po odečtení x zůstává $\frac{1}{2}y$, tj. polovina toho, co bylo vloženo po výhře.

3

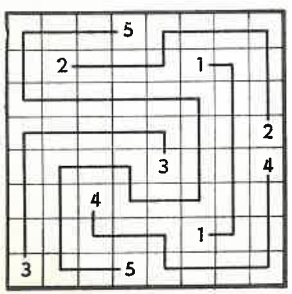
Viz obr. 322.

4

Ze součtu je hned jasné, že ? nahrazuje buď 3 nebo 8. Dosazením do rovnice vypočteme, že ? nahrazuje 8.

5

Označme kostky písmeny A, B, C. Postupujeme např. takto: Položme A na jednu misku a B na druhou misku (první vážení). Nastane-li rovnováha, není ani jedna z kostek A, B falešná, čili falešná je kostka C. Jestliže nenastane rovnováha, je jedna z kostek A, B falešná. Porovnáním váhy kostky A s kostkou C, která v tomto případě není falešná, zjistíme, která je falešná.



Obr. 322

Která kostka je těžší, zda pravá nebo falešná kostka, zjistíte po objevení pravé a falešné kostky jejich porovnáním.

6

Jde o Goldbachův problém, jehož důkaz podal sovětský matematik Vinogradov. Každé sudé číslo kromě dvojky se dá vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

7

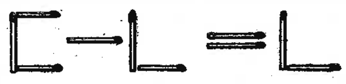
$$\begin{array}{l} 125 \times 37 \\ \hline 375 \\ \ \ 875 \\ \hline 4625 \end{array}$$

8

Máme sečíst čísla $1 + 2 + 3 + \ldots + 62 + 63 + 64$. Abychom si výpočet ulehčili, uspořádáme sčítance vhodným způsobem do dvojic takto:
$(1 + 64) + (2 + 63) + (3 + 62) + \ldots + (31 + 34) + + (32 + 33)$.
Součet sčítanců v každé závorce je 65, takže hledaný součet je $65 \,.\, 32 = 2\,080$.
Na celé šachovnici je 20,80 Kčs.

9

1. Rozvážíme rýži nejdříve na dvě stejné části po 4,5 kg (k tomu závaží nepotřebujeme).
2. Jednu z těchto částí znovu rozdělíme na 2 poloviny (bude tudíž vážit 2 250 g).
3. Z jednoho z těchto dílů odvážíme pomocí závaží 250 g. Co zůstalo, váží 2 kg. Všechno ostatní váží dohromady 7 kg.



Obr. 323 Obr. 324

10

25 + 25 + 10; 25 + 25 + 5 + 5;
25 + 10 + 10 + 10 + 5;
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10;
25 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5.

11

Sestřičce je $\frac{1}{2}$ roku.

12

Viz obr. 323.

13

Viz obr. 324.

15

Součet a rozdíl má správně vypadat takto:

$$\begin{array}{r} 5\,805 \\ +\ 1\,265 \\ \hline 7\,070 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,500 \\ -\ 3\,496 \\ \hline 4\,004 \end{array}$$

17

$$\begin{array}{r} 29\,786 \\ 850 \\ 850 \\ \hline 31\,486 \end{array}$$

18

Nechť z vnější krabičky, kde bylo 9 bonbónů, přemístí jeden do střední krabičky. Potom bude v každé krabičce lichý počet bonbónů (v nejmenší 5, v další 4 + 5, v další 4 + 4 + 5 a v největší 8 + 4 + 4 + 5).

19

Obě strany rovnosti jsme dělili výrazem (7 + 2 — 9), jenž se však rovná nule, a to je nepřípustné.

20

Číslo, udávající počet mandarínek, nebylo dělitelné ani 10, ani 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Vždy zůstávaly zbytky o 1 menší, než byl dělitel. Číslo, určující počet mandarínek, musí být o 1 menší než nejmenší společný násobek uvedených čísel, tj. 2 519.

21

Připíší se taková čísla, jejichž číslice se doplňují s číslicemi libovolně zvolených čísel na 9. Součet musí být dělitelný devíti, taktéž i jeho ciferný součet. Jestliže ciferný součet po přeškrtnutí některé číslice nebude dělitelný 9, rozdíl mezi ciferným součtem a nejbližším násobkem devíti je přeškrtnuté číslo. Přeškrtne-li se 9 nebo 0, uhádneme případně až podruhé.

22

Dcera dělala jen prostředníka mezi hrou dvou mistrů. Jestliže první táhl mistr *A* bílou figurkou, dcera tento tah opakuje na šachovnici s mistrem *B*. *A* tak vždy jednu partii ze dvou simultánních musela vyhrát (nebo obě remizovala).

23

Hledané číslo, jehož druhá mocnina byla vyjádřena písmeny, je 221. Jeho druhá mocnina je tudíž 48 841, a to zřejmě vyhovuje danému zápisu v písmenech.
Při řešení postupujeme takto:
1. První číslice musí být zřejmě 2, protože kdyby to byla

číslice 3, bylo by to nejméně číslo 330 (2 první číslice kořene musí být podle podmínky shodné). Druhá mocnina čísla 330 je však už šesticiferné číslo, proto musí být první číslicí 2.

2. Podle podmínky úlohy je i druhá číslice 2.
3. Poslední číslice druhé mocniny je shodná s poslední číslicí kořene.

Hledaná číslice může být tudíž jen 0, 1, 5, 6. Poslední úlohou je tudíž zjistit, která z těchto číslic se hodí pro náš případ. Stačí umocnit číslo 221 a dostaneme číslo 48 841, a to je i řešením úlohy, protože se shoduje se zápisem *ABBAC*.

24

Prodělal dukát. Kůň má cenu 160 mincí.

25

Správně doplněné součty mají vypadat takto:

251	5 555
89	555
695	545
1 035	6 655

26

Z druhé rovnice $I = 0$, z třetí rovnice $S = 1$, dále $O + E = 10$, $F + 1 = L$, aby MI bylo velké číslo, platí $M = 9$ atd. Obě řešení jsou:

	D	*O*	*R*	*E*	*M*	*I*	*F*	*A*	*S*	*L*
I.	2	3	6	7	9	0	4	8	1	5
II.	3	4	5	6	9	0	7	2	1	8

27

Správně má být: 1b, 2c, 3c, 4a.

28

Je třeba vyhledat nejmenší společný násobek čísel n

$(4, 8, 12, 16) = 48$. Nejdříve se všechny parníky sejdou v přístavu za 48 týdnů.

29

Z ohlášeného výsledku vynecháme jednotky a z čísla vytvořeného z ostatních číslic odečteme 2 a dostaneme počet let. Např. někomu je 17 let. $2 \cdot 17 = 34$, $34 + 5 = 39$, $39 \cdot 5 = 195$. Po vynechání jednotek zůstává číslo 19. Odečteme 2 a dostaneme hledaný věk.

Vysvětlení: Jestliže počet let označíme x, jejich dvojnásobek je $2x$. Po přičtení čísla 5 dostaneme $2x + 5$. Po násobení 5 dostáváme:

$(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25 = 10x + 20 + 5 = 10 (x + 2) + 5$.

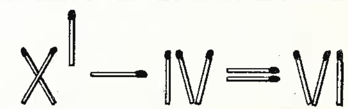
$10 (x + 2)$ je desetinásobek počtu let zvětšeného o 2. Po vynechání jednotek v čísle dostáváme $x + 2$ a po odečtení 2 dostaneme hledaný počet let.

34

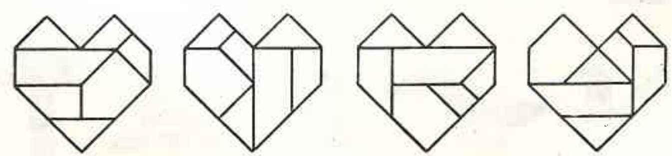
Vinař musel vrátit 92,75 franků (výsledek je zaokrouhlen).

Obr. 325

Obr. 326



Obr. 327

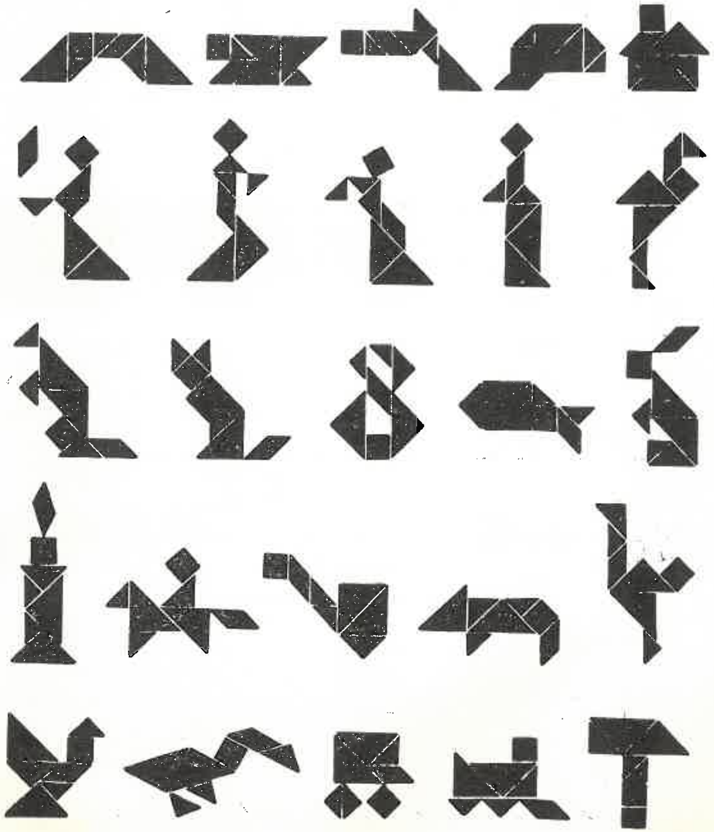


$1 + 0{,}95 + 0{,}902\,5 + 0{,}857\,4 = 3{,}709\,9 \doteq 3{,}71$
$3{,}71 \,.\, 25 = 92{,}75$

35

Viz obr. 325.

Obr. 328



36

Viz obr. 326.

37

4 způsoby, jak složit srdce ze skládanky TRI UAN, jsou na obr. 327.

38

Viz obr. 328.

Použitá literatura

B. Poľak: Zajímavé úlohy, SPN, Bratislava 1953

B. A. Kordemskij: Matematické prostocviky, Mladá fronta, Praha 1957

J. I. Perelman: Zajímavá matematika, Mladá fronta, Praha 1961

Jiří Sedláček: Nebojte se matematiky, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960

Učební texty pro experimentální matematické školy

Szczepan Jeleński: Śladami Pitagorasa, Państwowe Zaklady Wydawnictw Szkolnych, Varšava 1961

Lukács-Tarján: Vidám matematika, Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapešť 1963

Hugo Steinhaus: Sto zadań, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Varšava 1958

Lambacher Schweizer: Rechnen und Raumlehren, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Časopisy: Věda a technika mládeži, Svět techniky, Příroda a společnost, Svět socialismu, Mladý technik (polský), Technika mládeži (sovětský), The Mathematics Teacher (americký)

Obsah

Knižnice všeobecného vzdělání
Řada Maják

ŠTEFAN NOVOVESKÝ,
KAROL KRIŽALKOVIČ,
IMRICH LEČKO

777 matematických zábav a her

Z UČIVA 6.—9. ROČNÍKU
ZÁKLADNÍ DEVÍTILETÉ ŠKOLY

Ze slovenského originálu přeložil Zdeněk Trefný. Ilustroval, obálku navrhl a graficky upravil prof. Jaroslav Šváb. Vydání 1. — Praha 1971 — Počet stran 384. Odpovědná redaktorka: Anežka Bittnerová. Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk. Technický redaktor: Jiří Krejsa. Vytiskl n. p. Mír, závod 6, Legerova 22, Praha 2.
12,54 AA (9,85 AA textu, 2,69 AA grafiky) — 13,07 VA
Náklad 15 000 výtisků
Tematická skupina a podskupina 14/66
Cena vázaného výtisku Kčs 16,00
510/22,855
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 05 — 19 — 05

14-382-71 Kčs 16,00